

# 多孔介质中 Brinkman 方程组解的连续依赖性\*

石金诚

广州华商学院数据科学学院, 广东 广州 511300

**摘要:** 考虑了三维有界凸区域上带有 Soret 效应的 Brinkman 方程组的连续依赖性。利用微分不等式, 得到解的相关估计, 尤其是推导出了盐浓度的四阶范数估计。最终运用能量方法和先验估计, 建立了方程组的解对 Brinkman 系数  $\lambda$  的连续依赖性。

**关键词:** Brinkman 方程组; 连续依赖性; Brinkman 系数; Soret 系数

**中图分类号:** O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2023)03-0161-08

## Continuous dependence of solutions for the Brinkman equations in porous media

SHI Jincheng

School of Data Science, Guangzhou Huashang College, Guangzhou 511300, China

**Abstract:** The continuous dependence of Brinkman equations with Soret effect on a three-dimensional bounded convex domain is considered. By using differential inequality, the correlation estimates of the solution is obtained, especially the fourth-order norm estimation of salt concentration is derived. Finally, using the energy method and the prior estimation, the continuous dependence of the solution of the equations on Brinkman coefficient  $\lambda$  is established.

**Key words:** Brinkman equations; continuous dependence; Brinkman coefficient; Soret coefficient

Straughan et al. (1999) 引入了具有 Soret 效应且不可压缩的对流扩散 Brinkman 方程, 他们在有界区域内建立了解对 Soret 系数的连续依赖性, 有关 Brinkman 方程更系统的介绍见文献 (Nield et al., 1992; Straughan, 2008)。偏微分方程(组)的连续依赖性或收敛性, 称之为结构稳定性, 关于结构稳定性的本质见文献 (Ames et al., 1997)。

近年来, 多孔介质中流体方程组的研究越来越受到学者们的关注, 其中较为典型的流体方程组有 Brinkman、Darcy 和 Forchheimer 方程组, 文献 (Payne et al., 2007) 讨论了这些方程组的 Saint-Venant 原理。文献 (Franchi et al., 2003; Lin et al., 2007; Ciarletta et al., 2015; Cichon et al., 2015; Chen et al., 2016; Liu, 2017; Liu et al., 2018a; Liu et al., 2018b; 李远飞, 2019a; 李远飞, 2019b; 李远飞等, 2019; 李远飞, 2020) 讨论了包括 Brinkman、Darcy 和 Forchheimer 方程组在内更多偏微分方程组的结构稳定性, 获得了一些新的成果。本文我们考虑如下 Brinkman 方程组

\* 收稿日期: 2021-01-11 录用日期: 2021-03-05 网络首发日期: 2023-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(11371175)

作者简介: 石金诚(1983年生), 男; 研究方向: 偏微分方程; E-mail: shijc0818@gdhsc.edu.cn

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \lambda \Delta u_i - u_i - p_{,i} + g_i T + h_i C, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} = \Delta T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u_i C_{,i} = \Delta C + \sigma \Delta T, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \tau], \quad (1)$$

其中  $u_i, p, T, C$  分别为速度、压强、温度和盐浓度,  $g_i(x)$  和  $h_i(x)$  为重力函数且  $|g_i|, |h_i| \leq 1$ ,  $\Delta$  为拉普拉斯算子,  $\sigma > 0$  是 Soret 系数,  $\lambda > 0$  是 Brinkman 系数。

方程组(1)在  $\Omega \times [0, \tau]$  内成立, 其中  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^3$  中有界单连通的凸区域,  $\tau$  是固定的一个常数且  $0 \leq \tau < +\infty$ . 我们所考虑的温度与盐浓度的边界是绝缘的, 并且溶质通过边界的通量为 0。

其边界条件为

$$u_i = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau]. \quad (2)$$

此外, 初始条件为

$$u_i(x, 0) = f_i(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad C(x, 0) = C_0(x), \quad x \in \Omega.$$

本文研究了方程组(1)的解对 Brinkman 系数  $\lambda$  的连续依赖性。为了获得连续依赖性的结果, 通常的做法是利用温度和盐浓度的最大值, 去推导出交叉项的先验界, 而本文方程组(1)的第 4 个方程中含有温度的拉普拉斯项, 该项的存在导致盐浓度  $C$  的最大值估计难度很大。为了克服这个难题, 我们采用给出  $C$  的四阶范数的先验界。为了推导出到  $C$  的四阶范数的先验界而构造的函数是文中最大创新点。

本文用逗号表示求偏导, 下标,  $i$  表示对  $x_i$  求偏导, 如:  $u_{,i}$  表示为  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ , 重复指标表示求和,  $u_{,i,i} =$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad u_{,i,j} u_{,i,j} = \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2.$$

## 1 先验估计

本节中将给出在后面定理的证明中所需的若干估计。

**引理 1** 对于温度  $T$ , 我们有如下估计

$$\text{Sup}_{[0, \tau]} \|T\|_{\infty} \leq T_M, \quad (3)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx d\eta \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_0^2 dx, \quad (4)$$

其中  $T_M = \|T_0\|_{\infty}$ .

**证明** 在方程组(1)的第 3 个方程两边同时乘以  $T^{2p-1}$ ,  $p \geq 1$ , 并在  $\Omega$  上积分得

$$\frac{1}{2p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |T|^{2p} dx + \int_{\Omega} u_i T_{,i} T^{2p-1} dx = \int_{\Omega} T_{,ii} T^{2p-1} dx. \quad (5)$$

由散度定理和式(2)得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i T_{,i} T^{2p-1} dx &= -(2p-1) \int_{\Omega} u_i T_{,i} T^{2p-1} dx, \\ \int_{\Omega} T_{,ii} T^{2p-1} dx &= -(2p-1) \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} T^{2p-2} dx = -\frac{2p-1}{p^2} \int_{\Omega} (T^p)_{,i} (T^p)_{,i} dx. \end{aligned}$$

从而

$$\int_{\Omega} u_i T_{,i} T^{2p-1} dx = 0,$$

且式(5)化为

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |T|^{2p} dx + \frac{2(2p-1)}{p} \int_{\Omega} (T^p)_{,i} (T^p)_{,i} dx = 0.$$

对上式从0到t积分得

$$\int_{\Omega} |T|^{2p} dx + \frac{2(2p-1)}{p} \int_0^t \int_{\Omega} (T^p)_{,i} (T^p)_{,i} dx d\eta = \int_{\Omega} T_0^{2p} dx. \tag{6}$$

两边取 $\frac{1}{2p}$ 次方，并让p趋于无穷大，取极限得

$$\text{Sup}_{[0,\tau]} \|T\|_{\infty} \leq \|T_0\|_{\infty}.$$

即证明了式(3)。

在式(6)中取 $p = 1$ ，有

$$\int_{\Omega} |T|^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx d\eta = \int_{\Omega} T_0^2 dx.$$

则

$$\int_0^t \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx d\eta \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_0^2 dx.$$

证毕

**引理2** 对于盐浓度C，我们有如下估计

$$\int_{\Omega} C^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx d\eta \leq L_1, \tag{7}$$

其中 $L_1 = \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} T_0^2 dx + \int_{\Omega} C_0^2 dx$ .

**证明** 在方程组(1)的第4个方程两边同时乘以C，并在Ω上积分，由Hölder不等式和算术几何平均不等式得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} C^2 dx + \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx = -\sigma \int_{\Omega} C_{,i} T_{,i} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx + \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx.$$

由上式可知

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C^2 dx + \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx \leq \sigma^2 \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx.$$

将上式从0到t积分，并由式(4)得

$$\int_{\Omega} C^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx d\eta \leq \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} T_0^2 dx + \int_{\Omega} C_0^2 dx = L_1.$$

证毕

**引理3** 对于盐浓度C，我们有如下的4阶范数估计

$$\int_{\Omega} C^4 dx \leq L_2, \tag{8}$$

其中 $L_2 = \int_{\Omega} C_0^4 dx + 12\sigma^2 \int_{\Omega} T_0^2 C_0^2 dx + mL_1 + \frac{n}{2} \int_{\Omega} T_0^2 dx$ .

**证明** 在方程组(1)的第4个方程两边同时乘以 $C^3$ ，并在Ω上积分得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} C^4 dx &= \int_{\Omega} C^3 (\Delta C + \sigma \Delta T - u_i C_{,i}) dx \\ &= -3 \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx - 3\sigma \int_{\Omega} C^2 C_{,i} T_{,i} dx \\ &= -3 \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx - 3\sigma \int_{\Omega} C C_{,i} [C T_{,i} + T C_{,i}] dx + 3\sigma \int_{\Omega} C T |\nabla C|^2 dx. \end{aligned}$$

运用式(3)，Hölder不等式和算术几何平均不等式，可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} C^4 dx &\leq -12 \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx + 6\sigma\varepsilon_1 \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx \\ &\quad + \frac{6\sigma}{\varepsilon_1} \int_{\Omega} (CT_{,i} + TC_{,i})(CT_{,i} + TC_{,i}) dx + 6\sigma\varepsilon_2 \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx + \frac{6\sigma T_M^2}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} |\nabla C|^2 dx, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是大于零的任意常数。

运用方程组(1)的第3个、第4个方程以及 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} T^2 C^2 dx &= 2 \int_{\Omega} TC^2 T_{,i} dx + 2 \int_{\Omega} CT^2 C_{,i} dx \\ &= 2 \int_{\Omega} TC^2 (\Delta T - u_i T_{,i}) dx + 2 \int_{\Omega} CT^2 (\Delta C + \sigma \Delta T - u_i C_{,i}) dx \\ &= -2 \int_{\Omega} (CT_{,i} + TC_{,i})(CT_{,i} + TC_{,i}) dx - 4 \int_{\Omega} TT_{,i} CC_{,i} dx - 4\sigma \int_{\Omega} TC |\nabla T|^2 dx - 2\sigma \int_{\Omega} T^2 T_{,i} C_{,i} dx \\ &= -2 \int_{\Omega} (CT_{,i} + TC_{,i})(CT_{,i} + TC_{,i}) dx - 4 \int_{\Omega} TT_{,i} CC_{,i} dx \\ &\quad - 4\sigma \int_{\Omega} TT_{,i} (CT_{,i} + TC_{,i}) dx + 2\sigma \int_{\Omega} T^2 T_{,i} C_{,i} dx. \end{aligned}$$

再运用式(3), Hölder 不等式和算术几何平均不等式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} T^2 C^2 dx &\leq -2 \int_{\Omega} (CT_{,i} + TC_{,i})(CT_{,i} + TC_{,i}) dx + 2\varepsilon_3 \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx \\ &\quad + \frac{2T_M^2}{\varepsilon_3} \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx + 2\sigma\varepsilon_4 \int_{\Omega} (CT_{,i} + TC_{,i})(CT_{,i} + TC_{,i}) dx \\ &\quad + \frac{2\sigma T_M^2}{\varepsilon_4} \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx + \sigma T_M^2 \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx + \sigma T_M^2 \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\varepsilon_3, \varepsilon_4$  是大于零的任意常数。

联合式(9)~(10), 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} C^4 dx + k \int_{\Omega} T^2 C^2 dx \right) &\leq -(12 - 6\sigma\varepsilon_1 - 6\sigma\varepsilon_2 - 2k\varepsilon_3) \int_{\Omega} C^2 |\nabla C|^2 dx \\ &\quad - \left( 2k - 2k\sigma\varepsilon_4 - \frac{6\sigma}{\varepsilon_1} \right) \int_{\Omega} (CT_{,i} + TC_{,i})(CT_{,i} + TC_{,i}) dx \\ &\quad + \left( \frac{6\sigma T_M^2}{\varepsilon_2} + k\sigma T_M^2 \right) \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx + \left( \frac{2kT_M^2}{\varepsilon_3} + \frac{2k\sigma T_M^2}{\varepsilon_4} + k\sigma T_M^2 \right) \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $k$  是大于零的任意常数。

式(11)中, 取  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2\sigma}$ ,  $k = 12\sigma^2$ ,  $\varepsilon_3 = \frac{1}{4\sigma^2}$ ,  $\varepsilon_4 = \frac{1}{2\sigma}$ , 可得

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} C^4 dx + 12\sigma^2 \int_{\Omega} T^2 C^2 dx \right) \leq m \int_{\Omega} C_{,i} C_{,i} dx + n \int_{\Omega} T_{,i} T_{,i} dx, \quad (12)$$

其中  $m = 12\sigma^2 T_M^2 (1 + \sigma)$ ,  $n = 12\sigma^3 T_M^2 (1 + 12\sigma)$ .

将式(4)和式(7)代入式(12), 可得

$$\int_{\Omega} C^4 dx + 12\sigma^2 \int_{\Omega} T^2 C^2 dx \leq L_2,$$

其中  $L_2 = \int_{\Omega} C_0^4 dx + 12\sigma^2 \int_{\Omega} T_0^2 C_0^2 dx + mL_1 + \frac{n}{2} \int_{\Omega} T_0^2 dx$ .

证毕

## 2 连续依赖性

假设  $(u_i, T, C, p)$  是如下 Brinkman 方程组初边值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \lambda_1 \Delta u_i - u_i - p_{,i} + g_i T + h_i C, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} = \Delta T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u_i C_{,i} = \Delta C + \sigma \Delta T, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \tau], \quad (13)$$

边界条件为

$$u_i = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau], \quad (14)$$

初始条件为

$$u_i(x, 0) = f_i(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad C(x, 0) = C_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (15)$$

此外，假设 $(u_i^*, T^*, C^*, p^*)$ 是如下Brinkman方程组初边值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^*}{\partial t} = \lambda_2 \Delta u_i^* - u_i^* - p_{,i}^* + g_i T^* + h_i C^*, \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} + u_i^* T_{,i}^* = \Delta T^*, \\ \frac{\partial C^*}{\partial t} + u_i^* C_{,i}^* = \Delta C^* + \sigma \Delta T^*, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \tau], \quad (16)$$

边界条件为

$$u_i^* = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau], \quad (17)$$

初始条件为

$$u_i^*(x, 0) = f_i(x), \quad T^*(x, 0) = T_0(x), \quad C^*(x, 0) = C_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

我们定义解的差为： $\omega_i = u_i - u_i^*$ ， $\theta = T - T^*$ ， $S = C - C^*$ ， $\pi = p - p^*$ ， $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ ，则 $(\omega_i, \theta, S, \pi)$ 满足如下初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \lambda_2 \Delta \omega_i + \lambda \Delta u_i - \omega_i - \pi_{,i} + g_i \theta + h_i S, \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega_i T_{,i} + u_i^* \theta_{,i} = \Delta \theta, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \omega_i C_{,i} + u_i^* S_{,i} = \Delta S + \sigma \Delta \theta, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \tau], \quad (19)$$

边界条件为

$$\omega_i = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau], \quad (20)$$

初始条件为

$$\omega_i(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0, \quad S(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

**引理4** 对于速度 $u_i$ ，有如下估计

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx d\eta \leq m_1(t), \quad (21)$$

其中  $m_1(t) = \frac{1}{2\lambda_1} T_M^2 |\Omega| t + \frac{1}{2\lambda_1} L_1 t + \frac{1}{2\lambda_1} \int_{\Omega} f_i f_i dx$ ， $|\Omega|$ 为 $\Omega$ 的体积。

**证明** 在方程组(13)的第1个方程两边同时乘以  $2u_i$ , 并在  $\Omega$  上积分得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i u_i dx + 2\lambda_1 \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx \leq \int_{\Omega} T^2 dx + \int_{\Omega} C^2 dx.$$

对上式从0到  $t$  积分, 并结合式(15)可得

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx d\eta \leq \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^t \int_{\Omega} T^2 dx d\eta + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^t \int_{\Omega} C^2 dx d\eta + \frac{1}{2\lambda_1} \int_{\Omega} f_i f_i dx.$$

由上式及式(3)和式(7)可得式(21)。

证毕

接下来, 将给出本文主要结果的证明。

**定理1** 设  $(u_i, T, C, p)$  为初边值问题(13)~(15)的古典解,  $(u_i^*, T^*, C^*, p^*)$  为初边值问题(16)~(18)的古典解,  $(\omega_i, \theta, S, \pi)$  是这两个解的差。当 Brinkman 系数差  $\lambda$  趋于 0 时, 解  $(u_i, T, C, p)$  收敛于解  $(u_i^*, T^*, C^*, p^*)$ , 且  $(\omega_i, \theta, S, \pi)$  满足

$$k_1 \int_{\Omega} \omega_i \omega_i dx + k_2 \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_{\Omega} S^2 dx \leq \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda_2} e^{k_3 t} m_1(t),$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  是大于零的常数。

**证明** 在方程组(19)的第1个方程两边同时乘以  $2\omega_i$ , 并在  $\Omega$  上积分, 由式(20)、Hölder 不等式和算术几何平均不等式, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega_i \omega_i dx + \lambda_2 \int_{\Omega} \omega_{i,j} \omega_{i,j} dx \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2} \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx + \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_{\Omega} S^2 dx. \quad (22)$$

在方程组(19)的第3个方程两边同时乘以  $2\theta$ , 并在  $\Omega$  上积分, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + 2 \int_{\Omega} \omega_i T_{,i} \theta dx + 2 \int_{\Omega} \theta u_{i,j} \theta_{,i} dx = 2 \int_{\Omega} \theta \Delta \theta dx. \quad (23)$$

由散度定理和式(20), 可得

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \omega_i T_{,i} \theta dx &= -2 \int_{\Omega} \omega_i T \theta_{,i} dx, \\ 2 \int_{\Omega} \theta \Delta \theta dx &= -2 \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx. \end{aligned}$$

从而由散度定理、Hölder 不等式、式(3)和式(20), 可将式(23)变为

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx \leq T_M^2 \int_{\Omega} \omega_i \omega_i dx. \quad (24)$$

在方程组(19)第4个方程两边同时乘以  $2S$ , 并在  $\Omega$  上积分, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} S^2 dx + 2 \int_{\Omega} \omega_i C_{,i} S dx + 2 \int_{\Omega} u_i^* S_{,i} S dx = 2 \int_{\Omega} S \Delta S dx + 2\sigma \int_{\Omega} S \Delta \theta dx.$$

由散度定理和式(20), 可得

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} S \Delta S dx + 2\sigma \int_{\Omega} S \Delta \theta dx &= -2 \int_{\Omega} S_{,i} S_{,i} dx - 2\sigma \int_{\Omega} S_{,i} \theta_{,i} dx, \\ 2 \int_{\Omega} \omega_i C_{,i} S dx &= -2 \int_{\Omega} \omega_i C S_{,i} dx. \end{aligned}$$

从而

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} S^2 dx + 2 \int_{\Omega} S_{,i} S_{,i} dx = 2 \int_{\Omega} \omega_i C S_{,i} dx - 2\sigma \int_{\Omega} S_{,i} \theta_{,i} dx.$$

运用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} S^2 dx + 2 \int_{\Omega} S_{,i} S_{,i} dx &\leq 2 \left( \int_{\Omega} (\omega_i \omega_i)^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} C^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} S_{,i} S_{,i} dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sigma^2 \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx + \int_{\Omega} S_{,i} S_{,i} dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (\omega_i \omega_i)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} C^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sigma^2 \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx + 2 \int_{\Omega} S_{,i} S_{,i} dx. \end{aligned} \quad (25)$$

对于满足在边界上为零的函数  $E$ , 由文献(Flavin et al., 1995)的结论, 我们有如下 Sobolev 不等式

$$\int_{\Omega} |E|^4 dx \leq c_1 \left( \int_{\Omega} |E|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} E_{i,j} E_{i,j} dx \right)^{\frac{3}{2}} \leq c_2 \left( \int_{\Omega} E_{i,j} E_{i,j} dx \right)^2, \quad (26)$$

其中  $c_1, c_2$  是大于零的常数。

在式(26)中, 取  $E = \omega_i$ , 可得

$$\int_{\Omega} (\omega_i \omega_i)^2 dx \leq c_2 \left( \int_{\Omega} \omega_{i,j} \omega_{i,j} dx \right)^2. \quad (27)$$

联合式(8)、(25)和(27), 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} S^2 dx \leq c_2 \sqrt{L_2} \int_{\Omega} \omega_{i,j} \omega_{i,j} dx + \sigma^2 \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx. \quad (28)$$

设  $F(t) = k_1 \int_{\Omega} \omega_i \omega_i dx + k_2 \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_{\Omega} S^2 dx$ , 其中  $k_1, k_2$  是大于零的任意常数。则联合式(22)、(24)和(28), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{dF(t)}{dt} + k_1 \lambda_2 \int_{\Omega} \omega_{i,j} \omega_{i,j} dx + k_2 \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx \\ & \leq \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda_2} \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx + k_1 \int_{\Omega} \theta^2 dx + k_1 \int_{\Omega} S^2 dx + k_2 T_M^2 \int_{\Omega} \omega_i \omega_i dx + c_2 \sqrt{L_2} \int_{\Omega} \omega_{i,j} \omega_{i,j} dx + \sigma^2 \int_{\Omega} \theta_{,i} \theta_{,i} dx. \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)中, 取  $k_1 = \frac{c_2 \sqrt{L_2}}{\lambda_2}$ ,  $k_2 = \sigma^2$  时, 有

$$\frac{dF(t)}{dt} \leq k_3 F(t) + \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda_2} \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx, \quad (30)$$

其中  $k_3 = \max \left\{ \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2 T_M^2}{k_1}, k_1 \right\}$ .

对式(30)从0到  $t$  积分, 可得

$$F(t) \leq \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda_2} \int_0^t e^{k_3(t-\eta)} \left( \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx \right) d\eta \leq \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda_2} e^{k_3 t} \int_0^t \int_{\Omega} u_{i,j} u_{i,j} dx d\eta. \quad (31)$$

联合式(21)和式(31), 可得

$$F(t) \leq \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda_2} e^{k_3 t} m_1(t).$$

证毕

**注** 本文我们研究了流体模型的解对 Brinkman 系数  $\lambda$  的连续依赖性。利用文中的类似方法, 依然可以建立方程组的解对其他方程系数的连续依赖性。接下来, 将考虑在有界区域内方程组的解对边界系数的结构稳定性。由于本文中的方程含有  $\Delta u_i$  项, 通过该项较容易得到速度梯度的估计, 接着我们将讨论不含有该项的情况, 此时如何获取速度梯度的估计将会是面临的障碍, 我们会在后续文章中进行研究。

### 参考文献:

- 李远飞, 2019a. 大尺度海洋大气动力学三维黏性原始方程对边界参数的连续依赖性[J]. 吉林大学学报(理学版), 57(5): 1053-1059.
- 李远飞, 2019b. 原始方程组对黏性系数的连续依赖性[J]. 山东大学学报(理学版), 54(12): 12-23.
- 李远飞, 郭连红, 2019. 具有边界反应 Brinkman-Forchheimer 型多孔介质的结构稳定性[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 34(3): 315-324.
- 李远飞, 2020. 海洋动力学中二维黏性原始方程组解对热源的收敛性[J]. 应用数学和力学, 41(3): 339-352.
- AMES K A, STRAUGHAN B, 1997. Non-standard and improperly posed problems[M]. San Diego: Academic Press.
- CHEN W H, LIU Y, 2016. Structural stability for a Brinkman-Forchheimer type model with temperature-dependent solubility[J].

- Bound Value Probl, (1): 1–14.
- CIARLETTA M, STRAUGHAN B, TIBULLO V, 2015. Structural stability for a thermal convection model with temperature dependent solubility[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 22: 34–43.
- CICHON M, STRAUGHAN B, YANTIR A, 2015. On continuous dependence of solutions of dynamic equations[J]. *Appl Math Comput*, 252: 473–483.
- FLAVIN J N, RIONERO S, 1995. *Qualitative estimates for partial differential equations: An introduction*[M]. Boca Raton: CRC Press.
- FRANCHI F, STRAUGHAN B, 2003. Continuous dependence and decay for the Forchheimer equations[J]. *Proc R Soc Lond A*, 459(2040): 3195–3202.
- LIN C, PAYNE L E, 2007. Structural stability for a Brinkman fluid[J]. *Math Meth Appl Sci*, 30(5): 567–578.
- LIU Y, 2017. Continuous dependence for a thermal convection model with temperature dependent solubility[J]. *Appl Math Comput*, 308: 18–30.
- LIU Y, XIAO S Z, 2018a. Structural stability for the Brinkman fluid interfacing with a Darcy fluid in an unbounded domain[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 42: 308–333.
- LIU Y, XIAO S Z, LIN Y W, 2018b. Continuous dependence for the Brinkman-Forchheimer fluid interfacing with a Darcy fluid in a bounded domain[J]. *Math Comput Simul*, 150: 66–82.
- NIELD D A, BEJAN A, 1992. *Convection in porous media*[M]. New York: Springer-Verlag.
- PAYNE L E, SONG J C, 2007. Spatial decay in a double diffusive convection problem in Darcy flow[J]. *J Math Anal Appl*, 330(2): 864–875.
- STRAUGHAN B, 2008. *Stability and wave motion in porous media*[M]. New York: Springer-Verlag.
- STRAUGHAN B, HUTTER K, 1999. A priori bounds and structural stability for double diffusive convection incorporating the Soret effect[J]. *Proc R Soc Lond A*, 455(1983):767–777.

(责任编辑 冯兆永)